GRATIS VOORBEELD

GRAAD 12 WISKUNDE · KABV

Kyk voor jy koop

’n Regte bladsy uit elke Top Grades-hulpbron

TOP GRADES
TUTORING

Wat is in hierdie voorbeeld

1	**Opsommingspakket**	1 van 12 eenbladsy-opsommings
2	**Teoriepakket**	die begin van Hoofstuk 3: Funksies
3	**Oefeneksamens**	voorblad en Vraag 1 van Stel 1, Vraestel 1
4	**Verduidelikende memo**	Vraag 1-memo en die puntekaart
5	**Meesterskap-werkkaarte**	die eerste twee bladsye van Werkkaart 1

TOP GRADES TUTORING

Kry die volledige pakke

10 oorspronklike vraestelle met verduidelikende memo’s, 12 teoriehoofstukke, 5 werkkaarte en 12 opsommingsblaaie, in Afrikaans en Engels. Beskikbaar by topgrades-tutoring.com.

OPSOMMING · HOOFSTUK 3 · VRAESTEL 1 ongeveer 35 punte

Funksies & inverses

Parabool, hiperbool, eksponensieel: skets, lees en omkeer

TOP GRADES TUTORING

Parabool

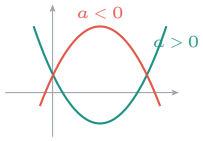
$y = a(x+p)^2 + q$

DP $(-p; q)$ · as $x = -p$

$y = ax^2 + bx + c$: $x = -\dfrac{b}{2a}$

wortelvorm:

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$



Hiperbool

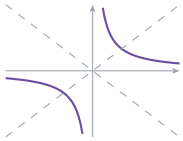
$y = \dfrac{a}{x+p} + q$

asimptote $x = -p$, $y = q$

simmetrie-asse:

$y = \pm(x+p) + q$

$a > 0$: kwadrante I & III



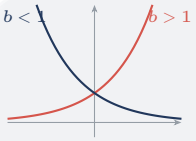
Eksponensieel

$y = a \cdot b^{x+p} + q$

asimptoot $y = q$

$b > 1$ stygend · $0 < b < 1$ dalend

$y = b^x$ gaan deur $(0; 1)$



Wat a, p en q doen

$x + p$	skuif **links** met p (teenoorgestelde teken!)
$+q$	skuif **op** met q
$a < 0$	refleksie in die x-as
$\lvert a \rvert$ groot	steiler / smaller

1 Skets enige grafiek in 5 stappe

1. vorm (a)
2. y-afsnit $(x = 0)$
3. x-afsnitte $(y = 0)$
4. DP of asimptote
5. benoem elke punt en asimptoot

? Vergelyking uit 'n grafiek

DP gegee $\rightarrow$ $y = a(x+p)^2 + q$

wortels gegee $\rightarrow$ $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

asimptote gegee $\rightarrow$ vul eers p, q in

stel dan **nog een punt** in om a te kry

Lees die grafiek: vertaal

$f(x) > 0$	bo die x-as
$f(x) \geq g(x)$	f op of bo g
$f(x) \cdot g(x) < 0$	teenoorgestelde kante van x-as
$f'(x) > 0$	f stygend
$f(x) = k$, 2 wortels	lyn $y = k$ sny twee keer

Antwoorde is altyd **x-waardes**. Kry eers die snypunte.

Vertikale afstand

lengte = **boonste grafiek** − **onderste grafiek**

$PQ = f(x) - g(x)$, dan maks by $x = -\frac{b}{2a}$ van die nuwe parabool.

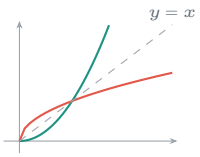
f^{-1} Inverse funksies

1. ruil x en y om
2. maak y die onderwerp

refleksie in $y = x$

$(a; b)$ op $f \rightarrow (b; a)$ op f^{-1}

definisieversameling van f = waardeversameling van f^{-1}



! Is die inverse 'n funksie?

Slegs as f **een-tot-een** is. 'n Parabool is nie: beperk dit eers tot $x \geq 0$ of $x \leq 0$.

Eksamentoets: horisontale-lyntoets.

bv. Eksamenvoorbeeld

$h(x) = \dfrac{2}{x-1} + 3$: asimptote $x = 1$, $y = 3$

x-afsnit: $\frac{2}{x-1} = -3 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ · as: $y = -(x-1) + 3$

Eksamengereed? Ek kan...

- ☐ al drie grafieke skets
- ☐ a, p, q uit 'n skets bepaal
- ☐ ongelykhede van grafieke aflees
- ☐ 'n vertikale afstand bepaal
- ☐ f^{-1} bepaal en skets
- ☐ 'n parabool beperk

Puntelokvalle

- ✗ $(x + 2)$ beteken 2 LINKS, nie regs nie.
- ✗ 'n Waardeversameling word met y geskryf, nie x nie.
- ✗ Hakies: $f(x) - g(x) = \cdots - (x + 2)$.
- ✗ Sluit nooit 'n asimptoot in 'n antwoord in nie.
- ✗ $f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$.
- ✗ Benoem afsnitte en asimptote op sketse.

HOOFSTUK 3 · VRAESTEL 1

Funksies & inverses

Grafieke, hul eienskappe en inverses

Graad 11-grafieke plus Graad 12-inverses · ongeveer 35 punte in Vraestel 1

TOP GRADES TUTORING

3.1 Die drie grafieke | 3.2 Skets | 3.3 Grafieke lees | 3.4 Inverses

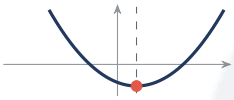
3.1 Die drie grafieke

- 'n **Funksie** gee elke x-waarde **presies een** y-waarde. Toets: geen vertikale lyn mag die grafiek twee keer sny nie.
- **Definisieversameling** = al die x-waardes. **Waardeversameling** = al die y-waardes.

Ken hierdie drie families

PARABOOL

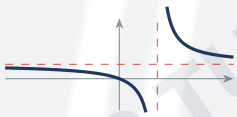
$y = a(x+p)^2 + q$



Draaipunt: $(-p\,;\,q)$
Simmetrie-as: $x = -p$
$a > 0$: minimum · $a < 0$: maksimum
Vir $ax^2 + bx + c$: $x = -\frac{b}{2a}$

HIPERBOOL

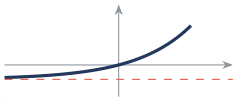
$y = \frac{a}{x+p} + q$



Asimptote: $x = -p,\ y = q$
Simmetrie-asse:
$y = (x+p) + q$
$y = -(x+p) + q$
$a > 0$: kwadrante 1, 3 · $a < 0$: 2, 4

EKSPONENSIEEL

$y = a \cdot b^{x+p} + q$



Asimptoot: $y = q$
$b > 1$: stygend
$0 < b < 1$: dalend
$a < 0$: omgeklap oor die asimptoot
Waardeversameling: $y > q$ (as $a > 0$)

PASOP

- p werk **omgekeerd** van hoe dit lyk: $y = (x+2)^2$ skuif **2 na links**, nie regs nie. Draaipunt $(-2;0)$.
- Waardeversameling gaan oor y, definisieversameling oor x. Skryf hulle met die regte letter: $y \geq -1$, nie $x \geq -1$ nie.

IN 'N NEUTEDOP: EK KAN…

- ☐ Die vertikale-lyntoets gebruik
- ☐ Die asimptote van 'n hiperbool noem
- ☐ Die draaipunt en simmetrie-as van 'n parabool gee
- ☐ Die effek van a, p en q beskryf

3.2 Skets en vergelykings vind

Wat doen a, p en q?

p · **links/regs**	$(x+p)$ skuif die grafiek p **links**; $(x-p)$ skuif dit **regs**.
q · **op/af**	$+q$ skuif die grafiek **op**; $-q$ skuif dit **af**.
a · **vorm**	Teken: watter kant toe dit oopmaak / watter kwadrante. Grootte: hoe steil of wyd.

Hoe om enige grafiek te skets

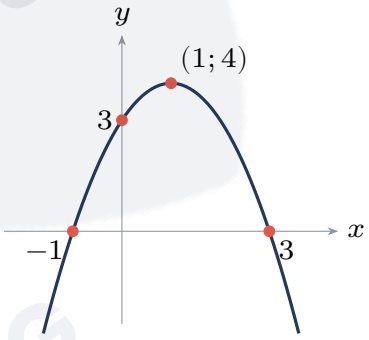
1 Vorm (teken van a) → **2** y-afsnit ($x=0$) → **3** x-afsnitte ($y=0$) → **4** DP of asimptote

benoem elke punt wat jy bereken het!

VOORBEELD 3.1 **Skets** $f(x) = -(x-1)^2 + 4$

- $a = -1 < 0 \rightarrow$ frons, dus 'n **maksimum**.
- Draaipunt: $(1\,;\,4)$
- y-afsnit: $f(0) = -(0-1)^2 + 4 = 3$
- x-afsnitte: $-(x-1)^2 + 4 = 0$

$$(x-1)^2 = 4$$
$$x - 1 = \pm 2$$
$$x = 3 \quad \text{of} \quad x = -1$$



Die vergelyking uit 'n grafiek vind

PARABOOL
DP gegee? $y = a(x+p)^2 + q$
x-afsnitte gegee?
$y = a(x-x_1)(x-x_2)$
Vervang dan nog 'n punt vir a.

HIPERBOOL
Asimptote gee p en q.
Vervang 'n punt om a te vind.

EKSPONENSIEEL
Asimptoot gee q.
Vervang punte om a en b te vind.

VOORBEELD 3.2 **'n Parabool sny die x-as by -1 en 3, en gaan deur $(0;-3)$. Vind sy vergelyking.**

Plan: die x-afsnitte is gegee, so gebruik die faktorvorm.

$$y = a(x+1)(x-3)$$ ← *tekenverandering:* $x=-1$ *gee* $(x+1)$

$$-3 = a(0+1)(0-3)$$ ← *vervang* $(0;-3)$

$$-3 = -3a \;\Rightarrow\; a = 1$$

$$y = x^2 - 2x - 3$$

TOP GRADES TUTORING

TOP GRADES TUTORING

GRAAD 12

OEFENEKSAMEN

WISKUNDE V1

STEL 1

VRAESTEL

PUNTE: 150 **TYD: 3 uur**

Hierdie vraestel bestaan uit 7 bladsye, insluitend die inligtingsblad.

TOP GRADES TUTORING

VRAAG 1

1.1 Los op vir x:

1.1.1 $3x^2 + 2x - 7 = 0$ (korrek tot TWEE desimale plekke) (4)

1.1.2 $x^2 + 3x \geq 10$ (4)

1.1.3 $\sqrt{2x + 7} = x + 2$ (4)

1.2 Los gelyktydig op vir x en y:

$$y - 2x = 1 \qquad \text{en} \qquad x^2 + y^2 - xy = 7$$

(6)

1.3 Bepaal die waarde van k waarvoor $kx^2 - 6x + 3 = 0$ twee gelyke wortels het. (3)

[21]

VRAAG 2

2.1 Beskou die kwadratiese getalpatroon: $5\ ;\ 8\ ;\ 15\ ;\ 26\ ;\ ...$

2.1.1 Skryf die volgende term van die patroon neer. (1)

2.1.2 Bepaal 'n uitdrukking vir die n^{de} term van die patroon. (4)

2.1.3 Watter term van die patroon is gelyk aan 1 181? (4)

2.2 Die som van die eerste n terme van 'n rekenkundige reeks word gegee deur $S_n = 3n^2 + 2n$.

2.2.1 Skryf die eerste term van die reeks neer. (1)

2.2.2 Bereken die 10de term van die reeks. (3)

2.3 Beskou die meetkundige reeks: $48 + 24 + 12 + ...$

2.3.1 Bereken die som van die eerste 8 terme van die reeks. (3)

2.3.2 Verduidelik waarom hierdie reeks konvergeer, en bereken die som tot oneindig. (3)

2.4 Bereken: $\sum_{k=1}^{30}(4k - 7)$ (3)

[22]

TOP GRADES TUTORING

VRAAG 1

1.1.1

Vlak 2 · Roetineprosedure

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(3)(-7)}}{2(3)} \checkmark \qquad = \frac{-2 \pm \sqrt{88}}{6} \checkmark$$

$$x = 1{,}23 \checkmark \qquad \text{of} \qquad x = -1{,}90 \checkmark$$

Waarom: "Twee desimale plekke" sê vir jou dit sal nie faktoriseer nie, dus gebruik die formule. Skryf eers $a = 3$, $b = 2$, $c = -7$ neer om tekenfoute onder die wortel te vermy.

Alternatiewe metode: Voltooiing van die vierkant: $x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{7}{3}$, dus $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{3} + \frac{1}{9} = \frac{22}{9}$. Dan is $x = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{22}}{3}$, wat $x = 1{,}23$ of $x = -1{,}90$ gee.

(4)

1.1.2

Vlak 2 · Roetineprosedure

$$x^2 + 3x - 10 \geq 0 \checkmark \qquad (x + 5)(x - 2) \geq 0 \checkmark$$

$$x \leq -5 \checkmark \qquad \text{of} \qquad x \geq 2 \checkmark$$

Waarom: Die parabool $y = (x + 5)(x - 2)$ "glimlag", dus is dit *bo* die x-as *buite* die kritieke waardes -5 en 2. "$\geq$" sluit die kritieke waardes in.

Alternatiewe metode: Tekentabel (getallelyn): merk -5 en 2. Toets $x = -6$: $(-)(-) = +$; $x = 0$: $(+)(-) = -$; $x = 3$: $(+)(+) = +$. Kies die gebiede waar die produk ≥ 0 is.

(4)

1.1.3

Vlak 3 · Komplekse prosedure

$$2x + 7 = x^2 + 4x + 4 \checkmark \qquad x^2 + 2x - 3 = 0 \qquad (x + 3)(x - 1) = 0 \checkmark$$

$$x = -3 \text{ of } x = 1 \qquad \text{Toets } x = -3: \ \sqrt{1} = 1 \neq -1, \text{ verwerp} \checkmark \qquad x = 1 \checkmark$$

Waarom: Om albei kante te kwadreer kan 'n vals antwoord skep. 'n Vierkantswortel is nooit negatief nie, dus moet die regterkant $x + 2 \geq 0$ wees. Dit skakel $x = -3$ uit.

Puntelek: Leerders stop dikwels by "$x = -3$ of $x = 1$". Sonder om te toets, gaan die punt vir die finale antwoord verlore. Stel altyd terug in die *oorspronklike* vergelyking.

(4)

TOP GRADES TUTORING

MY PUNTEKAART: WAAR HET EK PUNTE VERLOOR?

Merk jou vraestel met hierdie memorandum en vul dan jou punte vir elke onderwerp in. Elke onderwerp onder 60 % is jou prioriteit: doen eers sy **volgende stap** voordat jy die volgende vraestel skryf.

Onderwerp	V	Uit	My punt	%	Volgende stap as onder 60 %
Algebra, vergelykings & ongelykhede	1	21			Teoriepakket Hfst 1: kwadratiese vergelykings, ongelykhede, gelyktydige vergelykings, aard van die wortels
Rye & reekse	2	22			Teoriepakket Hfst 2 (alle onderwerpe)
Funksies: parabool & lyn	3	18			Teoriepakket Hfst 3: die drie grafieke, grafieke lees. Dan Werkkaart 1
Hiperbool, eksponensiële & loggrafieke	4	15			Teoriepakket Hfst 3 (inverses) en Hfst 4. Dan Werkkaart 1
Finansies	5	17			Teoriepakket Hfst 5: rentekoerse, annuïteite, delgingsfondse. Dan Werkkaart 2
Eerste beginsels, reëls & raaklyne	6	16			Teoriepakket Hfst 8: eerste beginsels, reëls, vergelyking van ’n raaklyn
Derdegraadse grafieke	7	16			Teoriepakket Hfst 7 en Hfst 8 (derdegraadse grafieke). Dan Werkkaart 3
Optimering & tempo van verandering	8	11			Teoriepakket Hfst 8: optimering & tempo van verandering. Dan Werkkaart 3
Waarskynlikheid & telling	9	14			Teoriepakket Hfst 12: waarskynlikheidsreëls, Venn-diagramme, boomdiagramme, telling
TOTAAL		**150**			

PUNTE PER VLAK

Elke vraag in hierdie memorandum het ’n vlak. Die vlak beskryf die *soort denke* wat ’n vraag vra. Dit sê niks oor hoe slim jy is nie: vlak 3- en 4-vaardighede groei met oefening, net soos die ander.

Vlak	Uit	My punt
Vlak 1 · Kennis (formules, feite, aflees)	22	
Vlak 2 · Roetineprosedure (standaardmetodes)	69	
Vlak 3 · Komplekse prosedure (verskeie stappe of idees verbind)	41	
Vlak 4 · Probleemoplossing (onbekend of nie-roetine)	18	

Top Grades Tutoring-leerders: bring hierdie bladsy na jou volgende sessie, sodat ons kan begin by die onderwerp wat jou die meeste punte sal teruggee.

TOP GRADES TUTORING

MEESTERSKAP-WERKKAART 1 · VRAESTEL 1

Funksies, inverses & logs

Grafieke lees, vergelykings en inverses bepaal

Die grafiekvaardighede wat in byna elke Vraestel 1 voorkom

TOP GRADES TUTORING

1 Gereedskap | 2 Uitgewerkte voorbeelde | 3 Jou beurt | 4 Foute | 5 Antwoorde

HOE OM HIERDIE WERKKAART TE GEBRUIK

1 Lees die gereedskapstel en die uitgewerkte voorbeelde. 2 Probeer elke vraag self, met 'n tydhouer. 3 Merk met die antwoorde agter: hulle verduidelik *hoekom*, nie net *wat* nie. 4 Doen elke vraag wat jy verkeerd gehad het 'n week later weer.

A Die gereedskapstel

PARABOOL

$y = a(x-p)^2 + q$ (draaipunt $(p;q)$)

$y = a(x-x_1)(x-x_2)$ (wortels x_1, x_2)

simmetrie-as halfpad tussen die wortels

HIPERBOOL

$$y = \frac{a}{x-p} + q$$

asimptote $x = p$ en $y = q$; simmetrie-asse $y = \pm(x-p)+q$

EKSPONENSIEEL

$y = a \cdot b^{x-p} + q$

asimptoot $y = q$; $b > 1$ stygend, $0 < b < 1$ dalend

LOGARITME

$y = \log_b x \iff x = b^y$

inverse van $y = b^x$; definisieversameling $x > 0$; x-afsnit $(1;0)$

'N INVERSE IN 3 STAPPE

1 Ruil x en y om. 2 Maak y die onderwerp. 3 Beperk die definisieversameling of kies die teken as die oorspronklike nie een-tot-een was nie.

Die grafiek van f^{-1} is die refleksie van f in die lyn $y = x$, dus word elke punt $(a;b)$ op f die punt $(b;a)$ op f^{-1}.

ONGELYKHEDE VAN 'N SKETS AFLEES

- $f(x) > g(x)$ beteken: waar is die grafiek van f **bo** die grafiek van g? Die antwoord is altyd 'n versameling x**-waardes**.
- $f(x) > 0$ beteken bo die x-as; $f(x) \cdot g(x) < 0$ beteken die twee grafieke is aan **teenoorgestelde kante** van die x-as.
- Bepaal eers die snypunte. Hulle is die "grense" van jou antwoord.

B Uitgewerkte voorbeelde

VOORBEELD W1.1 Gegee $h(x) = \dfrac{4}{x-2} + 1$ en die lyn $y = x - 1$.

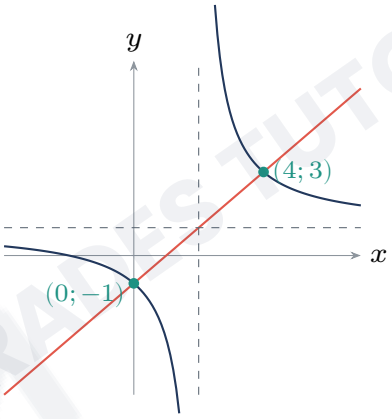
(a) Asimptote: $x = 2$ en $y = 1$

lees p en q direk af

(b) Afsnitte:

y-afsnit: $h(0) = \frac{4}{-2} + 1 = -1$

x-afsnit: $\frac{4}{x-2} = -1 \Rightarrow x = -2$



(c) Is $y = x - 1$ 'n simmetrie-as?

Dit gaan deur $(2; 1)$, waar die asimptote sny, en het gradiënt 1. Ja.

(d) Vir watter x is $h(x) \geq x - 1$?

$$\frac{4}{x-2} + 1 = x - 1 \Rightarrow 4 = (x-2)^2 \Rightarrow x = 0 \text{ of } x = 4$$

eers die snypunte

$h(x) \geq x - 1$: $x \leq 0$ of $2 < x \leq 4$

$x = 2$ uitgesluit: asimptoot

Toets met 'n toetswaarde: by $x = -2$ is $h = 0$ en die lyn is -3, dus is h bo. By $x = 5$ is $h \approx 2{,}3$ en die lyn is 4, dus is h onder.

VOORBEELD W1.2 Gegee $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Bepaal f^{-1} en los $f^{-1}(x) > -1$ op.

$x = \left(\frac{1}{3}\right)^y$ *stap 1: ruil om*

$y = \log_{\frac{1}{3}} x$ *stap 2: definisie van 'n log*

$f^{-1}(x) = -1$ wanneer $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$. Die grondtal is tussen 0 en 1, dus is f^{-1} 'n **dalende** grafiek: dit is bo -1 *links* van $x = 3$, maar slegs waar dit bestaan ($x > 0$).

$$0 < x < 3$$

VOORBEELD W1.3 Gegee $f(x) = x^2 + 2x - 3$. **Vir watter waardes van k sal $f(x) = k$ twee ongelyke *negatiewe* wortels hê?**

- Draaipunt: $x = -1, f(-1) = -4$.

  die laagste waarde
- y-afsnit: $f(0) = -3$.
- Trek horisontale lyne $y = k$: hulle sny albei arms **links** van die y-as slegs tussen -4 en -3.

$$-4 < k < -3$$

